1. a) $\begin{cases} 2x+3y+z=11 \\ x+5y+3z=14 \\ 4x-y-4z=3 \end{cases} \xrightarrow[E_3\to E_3-4E_1]{E_1\leftrightarrow E_2,\ E_2\to E_2-2E_1} \begin{cases} x+5y+3z=14 \\ -7y-5z=-17 \\ -21y-16z=-53 \end{cases}$

$\xrightarrow{E_3\to E_3-3E_1} \begin{cases} x+5y+3z=14 \\ -7y-5z=-17 \\ -z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y+2z-t=1 \\ 2x+3y-z+t=5 \\ x-6y+7z-4t=-2 \end{cases} \xrightarrow[E_3\to E_1-E_3]{E_2\to E_2-2E_1} \begin{cases} x-y+2z-t=1 \\ 5y-5z+3t=3 \\ 5y-5z+3t=3 \end{cases}$

$\to \begin{cases} x=1+y-2z+t \\ y=\dfrac{3+5z-3t}{5} \end{cases} \to \begin{cases} x=\dfrac{8-5\lambda+2\mu}{5} \\ y=\dfrac{3+5\lambda-3\mu}{5} \\ z=\lambda \\ t=\mu \end{cases}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -1 \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-7 \\ z=9 \end{cases}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=7,\ x=\dfrac{1}{7}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \\ 14 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-1,$

$y=\dfrac{1}{7}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 14 & 1 \end{vmatrix}=3,\ z=\dfrac{1}{7}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 14 \end{vmatrix}=7$

4. Para que el sistema sea compatible indeterminado (infinitas soluciones), es necesario que el rango de la matriz ampliada sea 2, y para ello se necesita que:

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 5k-25=0 \Rightarrow k=5$

Por tanto, $k=5$.

5. Para que el sistema homogéneo tenga soluciones distintas de la trivial, debe ser compatible indeterminado, y para ello se necesita que $\text{rg}(A)<3$, es decir, $|A|=0$.

$\begin{vmatrix} 2 & -2 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix}=-k=0 \Rightarrow k=0$

Si $k=0$, el sistema es compatible indeterminado y, por tanto, tiene infinitas soluciones, que son:

$\begin{cases} 2x-2y=0 \\ x+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ x=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ x=-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

6. Se calculan los rangos de la matriz de coeficientes y la ampliada:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=3\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2$. El sistema es compatible determinado y las rectas son secantes.

b) $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \text{rg}(A)=1$

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=2\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*)=2$. El sistema es incompatible y las rectas son paralelas.

7. a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}=a^2$

Si $a\neq 0$, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=3=$ n.º de incógnitas. Es un SCD con solución $x=a$, $y=1$, $z=-1$.

Si $a=0$, es un SCI con las siguientes soluciones:

$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\lambda-\mu \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{cases}$

b) $\begin{vmatrix} 1+a & a-1 \\ a & a+1 \end{vmatrix}=3a+1$

Si $a\neq -\dfrac{1}{3}$, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2=$ n.º de incógnitas. Es un SCD con solución $x=\dfrac{3a-1}{3a+1}$, $y=\dfrac{-1}{3a+1}$.

Si $a=-\dfrac{1}{3}$:

$\begin{cases} \dfrac{2}{3}x-\dfrac{4}{3}y=-\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}y=\dfrac{-4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-4y=-1 \\ -x+2y=-4 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}=-9\neq 0$

El sistema es incompatible; no tiene solución.

c) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=7\neq 0,\ \begin{vmatrix} 3 & -1 & a \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-3a+15$

Si $a=5$, $\text{rg}(A)=2=\text{rg}(A^*)=$ n.º incógnitas. Es un SCD con solución $x=2$, $y=1$.

Si $a\neq 5$, $\text{rg}(A)=2\neq\text{rg}(A^*)=3$. Es un sistema incompatible; no tiene solución.

8. El enunciado da lugar al siguiente sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas, donde x, y, z son el número de empleados que van a cada uno de los balnearios A, B y C, respectivamente.

$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 400x+160y+200z=27\,200 \\ 400x=5\cdot 160y \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=100 \\ 10x+4y+5z=680 \\ x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=40 \\ y=20 \\ z=40 \end{cases}$